4.2 Intégrales dépendant d'un paramètre

Les deux thèorèmes suivants sont des conséquences du théorème de convergence dominée.

4.2.1 Continuité des intégrales dépendant d'un paramètre

4.9 THÉORÈME (CONTINUITÉ DES INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE)

Soit $I = [a, b[$ et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : J \times I \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose

(i) Pour tout $x \in J$, la fonction partielle $f(x\ ,.) : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x, t)$ est localement intégrable sur sur I.

(ii) Pour tout $t \in I$, la fonction partielle $f(.\ , t) : J \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x, t)$ est continue sur J.

(iii) (condition de domination)
Il existe une fonction localement intégrable, $g : I \to \mathbb{R}^+$ telle que :
$\int_a^b g(t)dt$ converge et pour tout $(x, t) \in J \times I$, $|f(x,\ t)| \leq g(t)$.

Alors, l'application $F : J \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x, t)dt$$

est continue sur l'intervalle J.

Démonstration: De la condition de domination, on déduit que, pour tout $x \in J$, $\int_a^b |f(x,\ t)|\,dt$ converge, par conséquent $F : J \to \mathbb{R}$ est bien définie.

Soit x un élément de l'intervalle J. Montrons que l'application F est continue en x. Considérons pour cela une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de J convergente vers x. Définissons alors pour tout entier naturel n, l'application f_n sur l'intervalle I par

$$\begin{aligned} f_n :\ I\ &\to\ \mathbb{R} \\ t &\mapsto f(x_n,\ t). \end{aligned}$$

Nous avons

$$\forall t \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = f(x,\ t).$$
$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leq g(t).$$

Comme $\int_a^b g(t)dt$ converge, l'application du théorème de convergence dominée donne,

$$\lim_{n\to+\infty} F(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(x,\ t)dt = F(x).$$

On en déduit que F est continue au point x puis sur l'intervalle J.

4.11 REMARQUE

La continuité étant une propriété locale, nous obtenons la même conclusion sous une hypothèse plus faible, "la condition de domination locale" : Pour tout segment $K = [\alpha, \beta]$ inclus dans J, il existe une application $g_K : I \to \mathbb{R}_+$ telle que $\int_a^b g_K(t)dt$ converge et

$$\forall (x,\ t) \in K \times I,\ \ |f(x,\ t)| \leq g_K(t).$$

En effet, ceci entraîne, d'après le théorème précédent, la continuité de l'application F sur tout segment K inclus dans J, et par conséquent, la continuité de F en tout point de $\bigcup_{[\alpha,\beta]\subset J} [\alpha, \beta] = J$.

4.12 EXEMPLE. La fonction $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)e^{-xt}dt$ est continue.

En effet, la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, définie par $f(x,t) = \cos(t)e^{-xt}$, est continue. D'autre part, pour tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+^*$, on a la condition de domination :

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+, \quad |f(x,t)| \leq e^{-xt} \leq e^{-at}$$

et $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-at}dt = \frac{1}{a}$ converge. 0n en déduit, par theorème 4.9, que F est continue sur tout segment $[a,b]$ de $\mathbb{R}_+$, donc continue sur $\displaystyle\bigcup_{0<a<b<+\infty} [a,b] = \mathbb{R}_+^*$

Dans le cas où I est un segment de $\mathbb{R}$ et $f : J \times I \to \mathbb{R}$ est continue la condition de domination est toujours vérifiée :

4.13 COROLLAIRE
Soit $I = [a,b]$ un segment et J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : J \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'application $F : J \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$$

est continue sur l'intervalle J.

Démonstration: Pour tout segment $K = [\alpha, \beta]$ inclus dans J, par continuité de f sur $K \times I$ il existe une constante C_K telle que

$$\forall (x,\ t) \in K \times I, \ \ |f(x,\ t)| \leq C_K$$

et toute application constante étant intégrable sur le segment $[a,b]$ d'après le theorème précédent, F est continue sur tout segment K de J, donc sur J. ∎

4.15 EXEMPLE. La fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $F(x) = \displaystyle\int_0^1 \sin(tx)dt$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, la fonction $(x,t) \mapsto f(x,\ t) = \sin(tx)$ est continue sur $\mathbb{R} \times [0,1]$, le corollaire permet de conclure.

4.2.2 Dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre

4.16 THÉORÈME (DÉRIVABILITÉ DES INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE)
Soient $I = [a,b[$ et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : J \times I \to \mathbb{R}$ une fonction telle que :

1) Pour tout $x \in J$, la fonction partielle $f(x\ ,.) : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x,t)$ est localement intégrable et $\displaystyle\int_a^b f(x,\ t)dt$ converge

2) Pour tout $t \in I$, la fonction partielle $f(.\ ,t) : J \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t)$ est dérivable sur J c-à-d. que pour tout $(x,t) \in J \times I$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)$ existe.

3) (condition de domination)
Il existe une fonction localement intégrable, $g : I \to \mathbb{R}^+$ telle que :
$\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge et pour tout $(x,t) \in J \times I$,

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)\right| \leq g(t).$$

Alors l'application F définie par

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$$

est dérivable sur J et

$$\forall x \in J,\ F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)dt.$$

Si de plus, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $J \times I$, alors F est de classe C^1.

Démonstration: Soit x un élément de l'intervalle J. Montrons que l'application F est dérivable en x. Considérons pour cela une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $J \setminus \{x\}$ convergente vers x. Pour tout entier naturel n, définissons l'application f_n par

$$\begin{array}{rcl} f_n : I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{f(x_n,t) - f(x,t)}{x_n - x}. \end{array}$$

Nous avons, par hypothèse

$$\forall t \in I,\ \lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t).$$

D'autre part, en utilisant le théorème des accroissements finis, nous pouvons choisir, pour tout réel t élément de l'intervalle I et pour tout entier naturel n, un élément de J noté $\theta_n(t)$, compris entre x et x_n vérifiant

$$f_n(t) = \frac{f(x_n,t) - f(x,t)}{x_n - x} = \frac{\partial f}{\partial x}(\theta_n(t),\ t).$$

Ainsi,

$$\forall n \in \mathrm{N}, \forall t \in I,\ |f_n(t)| = \left|\frac{\partial f}{\partial x}(\theta_n(t),\ t)\right| \le g(t).$$

L'application du théorème de convergence dominée, nous donne :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{F(x_n) - F(x)}{x_n - x} = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)dt.$$

L'application F est alors dérivable en x de dérivée $F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)dt.$

Si de plus, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $J \times I$, l'application $(x,t) \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ vérifie les condition du théorème de continuité 4.9, on en déduit que F' est continue sur J. ■

4.18 REMARQUE

On remarquera, comme pour la continuité, que la dérivabilité étant une propriété locale, on obtient la même conclusion sous une hypothèse de domination locale : pour tout segment $K = [\alpha, \beta]$ inclus dans I, il existe une application $g_K : I \to \mathbb{R}_+$ telle que $\displaystyle\int_a^b g_K(t)dt$ converge et

$$\forall (x,\ t) \in K \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)\right| \le g_K(t).$$

ceci entraîne la dérivabilité de l'application F sur tout segment K inclus dans J et l'égalité : $\forall x \in K,\ F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)dt$. par conséquent , F est dérivable en tout point de $\displaystyle\bigcup_{[\alpha,\beta]\subset J} [\alpha, \beta] = J$ et $\forall x \in J,\ F'(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)dt.$

Dans le cas où I est un segment de $\mathbb{R}$ et f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sont continue sur $J \times I$ la condition de domination est toujours vérifiée :

4.19 COROLLAIRE
Soit $I = [a, b]$ un segment et J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : J \times I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\dfrac{\partial f}{\partial x} : J \times I \to \mathbb{R}$ soit continue.
Alors l'application F définie par

$$\forall x \in I,\ F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$$

est de classe C^1 sur J et

$$\forall x \in J,\ F'(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)dt.$$

Démonstration: Pour tout segment $K = [\alpha, \beta]$ inclus dans J, par continuité de f et $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ sur $K \times I$ il existe une constante C_K telle que

$$\forall (x,\ t) \in K \times I,\ \ |f(x,\ t)| \leq C_K \text{ et } \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)\right| \leq C_K.$$

et comme toute application constante étant intégrable sur le segment $[a, b]$ d'après les theorèmes de continuité et dérivabilité, F est dérivable et de dérivée continue sur tout segment K de J, donc de classe C^1 sur J. ■

4.21 EXEMPLE. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto F(x) = \displaystyle\int_1^2 \frac{\cos(tx)}{t} dt.$
Alors, F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et, $F'(x) = -\displaystyle\int_1^2 \sin(tx)dt = \frac{1}{x}(\cos 2x - \cos x)$ pour $x \neq 0$ et $F'(0) = \displaystyle\int_1^2 0\, dt = 0.$

4.22 EXEMPLE (CALCUL DE LA VALEUR DE $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$).

1) Vérifier que, pour tout réel x, l'application $t \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est intégrable sur le segment $[0, 1]$.
On considère les applications F et G définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$F : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt, \quad G : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$$

2) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = -2G'(x)G(x)$.

3) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$

Réponse :

1) Pour tout réel x, l'application $t \mapsto \dfrac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}$ est continue sur le segment $[0, 1]$ donc intégrable sur ce segment.

2) On note f l'application définie par

$$f: \mathbb{R} \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,\ t) \mapsto \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}.$$

$$\forall (x,\ t) \in \mathbb{R} \times [0,\ 1],\ \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = -2x.e^{-x^2(1+t^2)}.$$

Soit α un réel strictement positif. Alors,

$$\forall x \in [-\alpha,\ \alpha], \forall t \in [0,\ 1],\ \left| \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right| \leq 2\alpha.$$

Toute application constante étant intégrable sur le segment $[0,1]$, on en déduit que F est dérivable sur le segment $[-\alpha,\ \alpha]$ avec,

$$\forall x \in [-\alpha,\ \alpha],\ F'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt.$$

Ainsi F est dérivable sur $\bigcup_{\alpha > 0} [-\alpha,\ \alpha] = \mathbb{R}$ avec,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = -2x \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} dt = -2xe^{-x^2} \int_0^1 e^{-(xt)^2} dt.$$

Pour tout réel x non nul, effectuons dans l'intégrale, le changement de variable $u = xt$.

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-u^2} du.$$

Nous remarquons que nous avons cette égalité pour $x = 0$. D'autre part, G est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G'(x) = e^{-x^2}$$

On en déduit que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F'(x) = -2G'(x)G(x). \qquad (*)$$

3) De $(*)$, il existe une constante réelle C, telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = -(G(x))^2 + C.$$

Ainsi, $C = F(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}$.
D'autre part

$$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leq F(x) \leq \int_0^1 e^{-x^2} dt \leq e^{-x^2}$$

entraîne, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$.
Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} (G(x))^2 = \dfrac{\pi}{4}$ puis $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$, par conséquent

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{x \to +\infty} G(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

4.23 Exemple (La fonction Gamma d'Euler). On considère la fonction de variable réelle :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1) Montrer que la fonction Γ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) Montrer que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \Gamma(x+1) = x\Gamma(x).$$
En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3) Montrer que la fonction Γ et de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ est que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$
$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln(t))^n e^{-t} dt.$$

Réponse :

1) La fonction $(x,t) \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.
Pour tout réel x, on a $t^{x-1}e^{-t} \underset{0}{\sim} t^{x-1}$, et que l'intégrale de Riemann $\int_0^1 t^{x-1}\,dt$ converge si et seulement si $x > 0$, on déduit que, pour tout réel x négatif ou nul, l'application $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

On va maintenant montrer que la fonction Γ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Considérons a et b deux réels strictement positifs vérifiant $0 < a < b$. Comme pour tout $x \in [a,b]$ on a $\begin{cases} 0 \le t^{x-1} \le t^{a-1} \text{ si } t \in]0,1] \\ 0 \le t^{x-1} \le t^{b-1} \text{ si } t > 1, \end{cases}$ on obtient
$$\forall (x,\ t) \in [a,\ b] \times \mathbb{R}_+^*,\ |t^{x-1}e^{-t}| \le (t^{a-1} + t^{b-1})e^{-t} = g_0(t).$$
Cette dernière application est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet,
$g_0 \underset{0}{\sim} t^{a-1} + t^{b-1}$, $\int_0^1 t^{a-1}\ dt$ et $\int_0^1 t^{b-1}\ dt$ convergent (puisque $a > 0$ et $b > 0$); $\lim_{t\to+\infty} t^2 g(t) = 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ converge.
On en déduit en utilisant le théorème 4.9 que l'application Γ est continue sur tout intervalle $[a,\ b] \subset \mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) Pour tout réel x strictement positif,
$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt.$$
Effectuons une intégration par parties en posant
$$u = t^x,\ du = xt^{x-1},$$
$$dv = e^{-t}dt,\ v = -e^{-t}.$$
Ainsi,
$$\Gamma(x+1) = \left[-t^x e^{-t}\right]_0^{+\infty} + x\Gamma(x) = x\Gamma(x).$$
À l'aide d'une récurrence, nous obtenons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.

3) On va montrer par récurrence que pour $n \in \mathbb{N}$, x et t strictement positifs, posons :
$$f_n(x,\ t)\ = t^{x-1}(\ln(t))^n e^{-t}$$
f_n est de classe C^∞ sur On a déjà vu que $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} f(x,\ t)dt$ existe.
Soient $0 < a < b < +\infty$ et définissons la fonction $g_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ par
$$g_n(t) = (t^{a-1} + t^{b-1})|\ln t|^n e^{-t}.$$

La fonction g_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, puisque :

pour $\gamma \in]0, a[$, $\lim_{t\to 0^+} t^{1-\gamma} g_n(t) = \lim_{t\to 0^+} (t^{a-\gamma} + t^{b-\gamma}) |\ln t|^n e^{-t} = 0$, $\int_0^1 t^{\gamma-1}\, dt$ converge, $\lim_{t\to+\infty} t^2 g(t) = 0$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge.

Comme pour tout $x \in [a, b]$ on a $\begin{cases} 0 \leq t^{x-1} \leq t^{a-1} \text{ si } t \in]0, 1] \\ 0 \leq t^{x-1} \leq t^{b-1} \text{ si } t > 1, \end{cases}$

on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la mojoration

$$\forall (x,\ t) \in [a,\ b] \times \mathbb{R}_+^*,\ |f_n(x, t)| \leq |t^{x-1}(\ln(t))^n e^{-t}| \leq g_n(t) \quad (*)$$

Soit $[a, b]$ un segment contenu dans $\mathbb{R}_+^*$. On va montrer, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que Γ est de classe C^n sur $[a, b]$ et que $\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln(t))^n e^{-t} dt$.

Pour $n = 0$, la continuité de Γ sur $[a, b]$ est prouvé dans 1).

Supposons l'hypothèse de récurrence vraie au rang n et établissons là au rang $n + 1$. La fonction f_n étant continue et continûment dérivable par rapport à x et de dérivée partielle par rapport à x égale à f_{n+1}. De la condition de domination $(*)$, on déduit que, grâce au théorème de dérivation 4.16, que la fonction $\Gamma^{(n)}$ est de classe C^1 sur $[a, b]$ et de dérivée égale à $\int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln(t))^n e^{-t} dt$. Ce qui prouve Γ est de classe C^{n+1} sur $[a, b]$ et que $\Gamma^{(n+1)}(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}(\ln(t))^{n+1} e^{-t} dt$. Ainsi, Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.